V-47 (59 min) 3-Enero 2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Geodésicas de luz en Esp-Tmp de Minkowski** **Diagramas de Penrose (1/2) en Esp-Tmp Minkowski**

Métrica de Minkowski: $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Con magnitudes Adimensionales (omitimos gorritos):

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Magnitudes Adimensionales:

Llamamos *a = Distancia recorre luz en 1 seg = c*

^s = s/a ; ^t=ct/a; ^x=x/a; ^y=y/a; ^z=z/a

Con coordenadas esféricas adimensionales: $\boxed{\boldsymbol{ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2}}$

¿Cómo son las geodésicas de Luz en EspTmp plano Minkowski, pero con métrica en coordenadas esféricas?

Consideramos movimiento en plano ecuatorial → $\theta = \pi/2$ y $d\theta = 0$.

Recordemos (V-28) que para la luz el elemento intervalo esp-tiemp es nulo $ds = 0$: $\boldsymbol{0 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2}$

Recordemos (V-40) que para la luz, al no haber tiempo propio, se usa parámetro λ.

Dividimos por $d\lambda^2$: $0 = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2$

En (V-40) vimos que el cuadrimomento de la luz es: $\underline{K} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha \quad \longrightarrow \quad 0 = -(K^0)^2 + (K^1)^2 + r^2 (K^3)^2$

Para hallar ecuaciones de geodésicas, $r = f(t)$ también podemos dividir por dt^2: $0 = -1 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$

Utilizando regla de la cadena, etc: $0 = -1 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -1 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 (K^3)^2 \left(\frac{1}{K^0}\right)^2$ (I)

Para hallar las componentes del cuadrimomento, que nos permitirán deducir las eecuaciones geoodeásicas $r = f(t)$ usaremos los vectores Killig y su teorema: $\underline{\xi} \cdot \underline{K} = cte$

Kill.temp (V-28) $\underline{\xi}^{temp} = e_0 \Longrightarrow e_0 \cdot \frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha = -E$ (sobrevive α = 0) $K^0 g_{00} = K^0(-1) = -E \quad \Longrightarrow K^0 = E\ (cte)$

Kill.angul (V-28) $\underline{\xi}^{xy} = e_3 \Longrightarrow e_3 \cdot \frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha = L_z$ (sobrevive α = 3) $K^3 g_{33} = K^3 r^2 = L_z \quad \Longrightarrow K^3 = \frac{L_z}{r^2}$ $L_z\ (cte)$

Sustituimos en (I): $0 = -1 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{L_z}{r^2}\right)^2 \frac{1}{E^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - C}$ Hemos llamado $C = (L_z/E)^2 = cte$

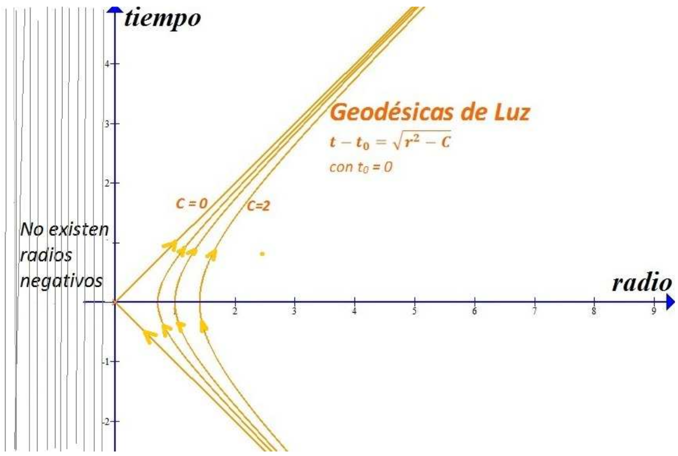
Para integrar ponemos: $dt = \frac{r}{\sqrt{r^2 - C}} dr$

Resulta para la ecuación de Geodésicas:

$$\boldsymbol{t - t_0 = \sqrt{r^2 - C}}$$

Si se elige $t_0 \neq 0$ el vértice de hipérbolas no coincidiría con eje horizontal.

No significa que los rayos de luz se curven en Esp-Tiem plano de Minkowski, sino que es efecto de coordenadas esféricas elegidas: en un plano un punto observa a fotón moverse y, según pasa el tiempo, la distancia *"r"* disminuye, llega a un mínimo y aumenta.



¿Qué es un Diagrama de Penrose? Es una gráfica Esp-Tmp, con corrdenadas adecuadas para dos condiciones:

- Las geodesicas de Luz, son rectas que forman 45º con ejes.
- Todo el Esp-Tiemp es fínito: las coordenadas están limitadas en intervalo finito

Para conseguir esto, partimos del Esp-Tmp anterior, con coordenadas esféricas, y hacemos tres pasos:

1) Hacemos cambio variables $(t,r) \rightarrow (p,q)$ para que el Esp-Tmp gire y las geodesícas-luz sean paralelas a ejes:

$\boldsymbol{p = t - r}$ → $dp = dt - dr$ Antiguo eje t $(r = 0) \rightarrow p = q$

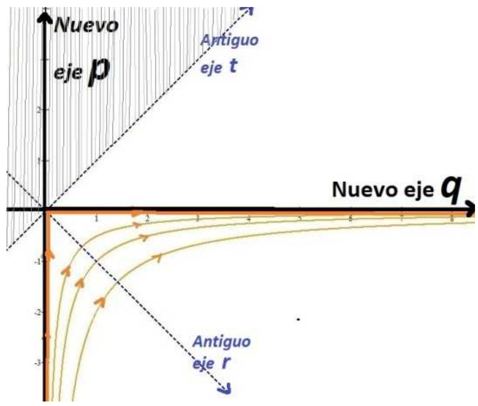
$\boldsymbol{q = t + r}$ → $dq = dt + dr$ Antiguo eje r $(t = 0) \rightarrow p = -q$

Solo coord. NO compactas (infinitas)

$\boldsymbol{ds^2 = -dt^2 + dr^2 = -dp \cdot dq}$

Vemos que con ese cambio de variables los ejes giran 45º. Su sentido se asigna viendo en las ecuaciones del cambio, cómo varían p y q al aumentar t ó r

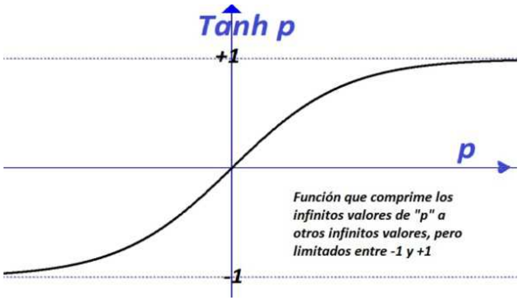
Se cumplen: $q - p = 2r \geq 0$ → <u>La zona rayada no es válida para las coordenadas (p,q)</u>



En el vídeo creo que hay error al dibujar ejes p y q

2) Otro cambio de varaibles *(p,q)* → *(V, U)* para que las coordenadas *(p,q)* no compactas (infinitas) se sustituyan por otras *(u, v)* compactadas (finitas) y así todo el Esp-Tiemp quede recluido a zona finita.

Necesitamos una "función compresora" que haga corresponder a cada uno de los infinitos valores de las variables, *p* ó *q*, otros infinitos valores, pero siempre limitados entre un máximo o mínimo. En un entorno del valor p = 0 la función parece lineal, pero conforme se acercan al límite los valores se acumulan más y más pero sin sobrpasarlo.
Una función (hay varias) que lo cumple es la tangente hiperbólica



Hacemos cambio:

$V = \tanh p \rightarrow dV = (1 - V^2)\, dp$

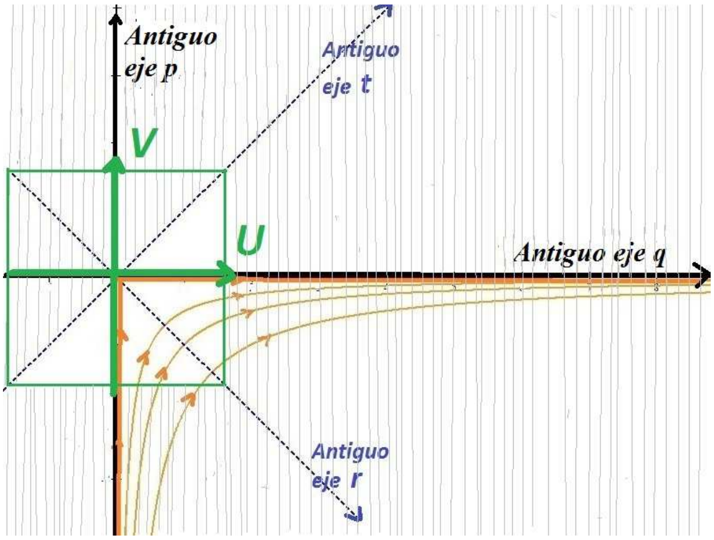
$U = \tanh q \rightarrow dU = (1 - U^2)\, dq$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 = -dp \cdot dq = \frac{-dV \cdot dU}{(1-V^2)(1-U^2)}$$

Los valores de las nuevas coordenadas *V* y *U* están limitados por el cuadrado verde de la figura.

Además, puesto que la *tanh* es monótonamente creciente, se cumple que si $q - p \geq 0 \rightarrow U - V \geq 0$

Por todo ello, concluimos que el rango de validez de las coordenadas *V* y *U* (todo el Esp-Tiem) queda limitado al triángulo sin rayar en la gráfica



3) Hacemos cambio variable *(V, U)* → *(T, X)* con objeto de volver a girar el Esp-Tiemp Luz forme 45º.

$U = T + X \rightarrow dU = dT + dX$ Antiguo eje *V (U=0)* → $T = -X$

$V = T - X \rightarrow dV = dT - dX$ Antiguo eje U *(V=0)* → $T = X$

Con ese cambio de variable los nuevos ejes *X* y *T* ocupan la posición de los antiguos *r* y *t* y las líneas de Luz vuelven a formar 45º con los ejes *X, T*

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 = -dp \cdot dq = \frac{-dV \cdot dU}{(1-V^2)(1-U^2)}$$

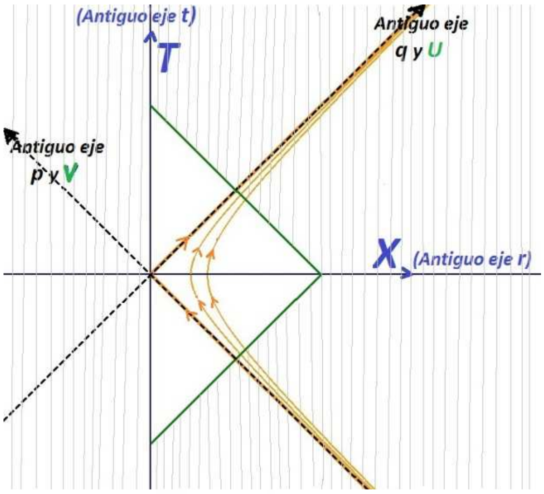
$$ds^2 = \frac{-dT^2 + dX^2}{[1-(T-X)^2][1+(T+X)^2]}$$

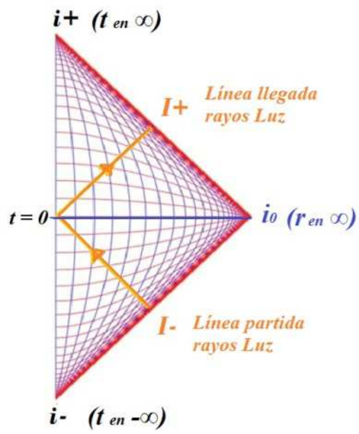
Deducimos rango de validez de las variables *X* y *T*, aunque ya era claro que sus límites son el triangulo no rayado, que ahora hemos girado:

$U - V \geq 0 \rightarrow (T + X) - (T - X) \geq 0 \rightarrow 2X \geq 0 \rightarrow \boldsymbol{X \geq 0}$

$-1 \leq U \leq +1 \rightarrow -1 \leq (T+X) \leq +1 \rightarrow \boldsymbol{T \leq -X + 1}$

$-1 \leq V \leq +1 \rightarrow -1 \leq (T-X) \leq +1 \rightarrow \boldsymbol{T \geq +X - 1}$





<u>El Diagrama de Penrose para el Esp-Tiemp de Minkowski</u>
se observa en la figura adjunta, donde se han rotulado los puntos singulares **i+**, **i−**, **i0** y las líneas singularetas $\boldsymbol{I^+}$ e $\boldsymbol{I^-}$.

Con un progrma informático Javier García ha mostrado el aspecto que tienen las líneas de valores constantes de las coordenadas originales ***(t , r)***